

PPW2.0
Prácticas de matemáticas
Pola Web

Francisco Botana

MANUAIS DA UNIVERSIDADE DE VIGO; 48

Botana Ferreiro, Francisco

PPW 2.0 : prácticas de matemáticas pola Web / Francisco Botana

Vigo : Universidade de Vigo, Servizo de Publicacións, D. L. 2011
78 p. ; 17x24 cm. – (Manuais da Universidade de Vigo ; 48)

D.L. VG-679-2011 – ISBN 978-84-8158-536-0

1. Matemáticas – Enseñanza en la Web I. Universidade de Vigo. Servizo de Publicacións, ed.

51(07)
004(07)

Edición:
Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo
Edificio da Biblioteca Central
Campus de Vigo
36310 Vigo
Telf.: 986 812 235
sep@uvigo.es

© Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo, 2011
© F. Botana

Printed in Spain - Impreso en España
ISBN: 978-84-8158-536-0
D.L.: VG-679-2011

Impresión: Tórculo Artes Gráficas, S.A.

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de este libro puede reproducirse o transmitirse por ningún procedimiento electrónico o mecánico, incluidos fotocopia, grabación magnética o cualquier almacenamiento de información e sistema de recuperación, sin el permiso escrito del Servizo de Publicacións da Universidade de Vigo.

Para Rosalía, Irene, Sabela e Loly

Pygmaeos gigantum humeris impositos, plusquam ipsos gigantes videre.

Diego de Estella

É maravilloso arruinar a festa dos poderosos e dos privilegiados.

Noam Chomsky

*Hace un millón de años, en la Prehistoria,
ellos eran los más fuertes y la fuerza era la ley.
Gigantescos, brutales, salvajes, animales.
Pero ocurrió, así fue: todos sucumbieron.
Ahora son petróleo, necesario en nuestro tiempo.
Cuando los dinosaurios dominaban la Tierra
era por la fuerza y ahora es de otra manera.*

Eskorbuto

The question is which is to be master — that's all.

Humpty Dumpty

Con la verdad, ni ofendo ni temo.

Hugo Chávez

Prefacio

Este folleto, e o medio dixital que o acompaña, teñen esencialmente dous obxectivos. Un deles é proporcionar unha colección de páxinas web interactivas para o estudo dalgúns obxectos matemáticos usualmente atopados nas ensinanza científica e técnicas de Grao. Sendo máis específicos, o manual pode ser usado principalmente nos primeiros cursos das Enxeñerías e outros Graos científicos (Matemáticas, Físicas ...). Estas páxinas interactivas son un complemento para a docencia e, ó mesmo tempo, serven para o estudo individual do alumnado, liberándoo de cálculos repetitivos ou tediosos e poñéndoo en contacto con Sage, un poderoso software matemático libre e gratuío. O segundo obxectivo é compartir coa comunidade un sistema operativo (GNU/Linux) tamén libre e gratuío, nunha distribución (Ubuntu) pensada para incitar ó usuario o cambio de paradigma. Se ás tradicionais misións da Universidade, docencia e investigación, se engadiu recentemente á de transferencia de tecnoloxía, este traballo abrangue docencia e transferencia. Pensamos que é tarefa fundamental de calquera profesor contribuír á formación de cidadáns socialmente responsables. A migración a sistemas abertos e o ensino neles son, polo tanto, obrigas de calquera servidor público na Universidade.

O manual contén un primeiro capítulo que fai unha breve descrición do sistema Sage. Este capítulo, de escrita colectiva, é un artigo inédito, feito hai xa algún tempo para profesores de Matemáticas. O seu obxectivo era difundir entre o profesorado non universitario a existencia de alternativas libres ós tradicionais asistentes matemáticos. Pensamos que a súa difusión na xeración que está a formarse contribúe tamén a ampliar horizontes, e neste contexto o artigo pode botar luz sobre o software proposto. Os restantes capítulos correspóndense coas follas que se poden atopar no medio dixital acompañante. A súa estrutura é sinxela: cada un iníciase cunha imaxe idéntica á que o usuario ou usuaria ten cando executa en Sage a folla de traballo de igual número. Fanse despois algunhas consideracións sobre o uso da folla e propóñense exercicios, comentados cando se estimou conveniente, relativos ó concepto que se vai estudar.

O software que acompaña o folleto chámase **PPW2.0** e preséntase baixo a forma dun DVD. A razón do nome é unha lembranza ó noso anterior manual, *PPW Prácticas de matemáticas Pola Web*, e a constatación da nosa evolución sobre a metodoloxía do ensino e aprendizaxe das matemáticas. O acrónimo PPW, lido *ppv*, era tamén un xogo de palabras cun xeito de distribución de contidos audiovisuais (*pay per view*), tentando subliñar o carácter público e gratuío do material ofrecido. Era, e segue a ser, unha certeza do autor que os lectores destas páxinas non incorren na machadiana confusión entre valor e prezo. O manual anterior baseábase en Mathematica, un programa propietario de cálculo matemático. O seu custo facía imposible unha distribución individualizada, polo

que a solución adoptada foi facilitar o acceso mediante internet a unha colección de páxinas web nas que o usuario podía encargarse de cálculos tediosos ou complexos. A custosa dependencia dun programa comercial, a consideración como segredos comerciais dos algoritmos empregados por Mathematica e a imposibilidade de acceso legal dos estudantes ó programa, leváronnos a reconsiderar a nosa práctica. Parte deste esforzo maniféstase neste manual e no software que o acompaña. Neles, moitos dos materiais utilizados proveñen do dominio público ou están acollidos a Creative Commons. Non é intención nosa tirar beneficio económico deste esforzo. A herdanza do nome pode inducir certa confusión entre a existencia do DVD e o concepto de prácticas pola web: o usuario pode executar as follas propostas ben por internet, ben en modo local, de xeito transparente, pero en ámbolos dous casos, usará un navegador web para visualizalas.

Para arrancar o sistema nunha computadora ordinaria, basta modificar a secuencia de arranque de xeito que o primeiro dispositivo lido sexa a unidade de CD (ou USB, no caso de dispoñer dun pendrive). Tras uns segundos, a pantalla amosará dúas liñas de texto, das que a segunda dirá `boot:`. Premendo a tecla Enter pasamos a outra pantalla onde a opción por defecto cargará o sistema na computadora e xa podemos empezar a usar **PPW2.0**. As velocidades de carga e de execución de **PPW2.0** dependen de moitas variables. Suxerimos a instalación do sistema no disco duro para unha execución máis áxil. Procuramos limitar ó máximo o número de contrasinais, sendo `ppw20` o valor canónico para o nome de usuario ou contrasinal.

Unha vez que **PPW2.0** estea correndo na computadora, lanzar Sage é doado. Clicando na icona de Sage, no centro da barra superior da pantalla, aparece unha terminal onde teclearemos `notebook()` seguido de Enter. Tras isto, ábrese o navegador Firefox e xa estamos no notebook de Sage (aínda que non teñamos conexión, a pestana **Traballar sen conexión** do menú **Ficheiro** de Firefox ten que estar desmarcada). Este e outros procesos comúns no uso de **PPW2.0** están documentados mediante os vídeos descritos no seguinte parágrafo.

Nas carpetas Documentos e Vídeos do directorio persoal pódense atopar distintos documentos para facer máis sinxela a transición á liberdade aquí ofrecida. En Vídeos hai clips que ilustran como conectarse á rede, como lanzar Sage, como lanzar o notebook, ... Un vídeo de visionado recomendado é o de Richard Stallmann. En Documentos hai unha extensa biblioteca multilíngüe (castelán, inglés, francés) de recursos relativos a Sage, dos que a referencia canónica é *Sage Tutorial*. En <http://webs.uvigo.es/fbotana/ppw20> pódense atopar os vídeos básicos de acceso, actualizacións, fe de erratas, etc.

Somos debedores de moita xente, nesta obra especialmente de William Stein e o equipo de desenvolvemento de Sage. As eventuais vantaxes deste traballo débense ó esforzo da comunidade; os erros, por suposto, son responsabilidade do autor.

F. Botana

Índice

Prefacio	III
0. Sage: Una aplicación libre para matemáticas	1
1. Representación de funcións $y = f(x)$	15
2. Representación simultánea de funcións $y = f(x), y = g(x), \dots$	17
3. Representación de funcións a anacos	19
4. Límite de funcións dunha variable	21
5. Derivada dunha función $f(x)$	23
6. Desenvolvemento de $f(x)$ en serie de Taylor	25
7. Primitiva dunha función $f(x)$	27
8. Integral definida dunha función $f(x)$	29
9. Representación de funcións de dúas variables $z = f(x, y)$	31
10. Representación de funcións implícitas $F(x, y, z) = 0$	35
11. Representación simultánea de funcións de dúas variables $z_1 = f(x, y), z_2 = g(x, y), \dots$	37
12. Límite de funcións de dúas variables	39
13. Derivadas parciais de funcións reais de varias variables $f(x, y, z, \dots)$	41
14. Desenvolvemento de $f(x, y)$ en serie de Taylor	43
15. Extremos relativos de funcións de dúas ou tres variables	45
16. Extremos condicionados de funcións de dúas ou tres variables cunha condición ou con dúas	47
17. Gradiente, curvas de nivel e campo gradiente de funcións de dúas variables	49

18. Gradiente, superficies equipotenciais e campo gradiente de funcións de tres variables	51
19. Plano tanxente a unha superficie $z = f(x, y)$ nun punto	53
20. Visualización de recintos planos	57
21. Visualización de rexións 3d	59
22. Integrais dobres	63
23. Integrais triplas	65
24. Resolución de ecuacións diferenciais ordinarias	67

Folla 0

Sage: Una aplicación libre para matemáticas

F. Botana^a, J. Escribano^b, M. Á. Abánades^c

^a Departamento de Matemática Aplicada I, EE Forestal, Universidad de Vigo,
Campus A Xunqueira, Pontevedra.

^b Departamento de Sistemas Informáticos y Computación, Facultad de Informática,
Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

^c Ingeniería Técnica en Informática de Sistemas, Centro Estudios Superiores Felipe II,
Universidad Complutense de Madrid, Aranjuez, Madrid.

Resumen

Sage es un software que nos permite experimentar con las matemáticas. Gratuito y de código abierto, constituye la apuesta más novedosa para utilizar las TIC en nuestro ámbito. La integración de múltiples herramientas, la posibilidad de acceso remoto por Internet y el énfasis por la decencia y la libertad conforman sus más notables características. Por su potencia y versatilidad auguramos que Sage se convertirá en el estándar de facto para la enseñanza con ordenador en las matemáticas de niveles medio y superior.

Palabras clave

Divulgación, Matemáticas computacionales, Experimentación, Software matemático, Secundaria, bachillerato y universidad.

Abstract

Sage is a computer application that allows direct experimentation with mathematics. Free and open source, it is the newest asset to use ICT in our area. The integration of multiple tools, the possibility of remote access via the Internet and the emphasis for decency and freedom make their most notable features. For its power and versatility we foresee Sage as the *de facto* standard for teaching mathematics with computers in secondary and university levels.

Keywords

Divulagation, Computational Mathematics, Experimentation, Mathematical software, High school and university.

Introducción

En los últimos números de Suma hemos leído con interés y agrado un artículo (Rodríguez 2009) y dos partes de una trilogía (Real 2009-1 y Real 2009-2) sobre un sistema de cálculo simbólico, Maxima (<http://maxima.sourceforge.net>). Insistiendo en el empeño queremos contribuir con estas notas a la difusión entre el profesorado de una herramienta nueva probablemente útil para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: *Sage, Software for Algebra and Geometry Experimentation* (<http://www.sagemath.org>). Sage, de hecho, incluye Maxima, además de ofrecer otras nuevas potencialidades para su uso en las aulas.

En este artículo esbozamos en la primera sección el origen de Sage y las motivaciones de su desarrollo, así como algunas reflexiones sobre la libertad. La segunda sección trata sobre las computadoras que pueden ejecutarlo e introduce el *notebook* de Sage, una aplicación para ejecutar Sage desde un navegador web. En la tercera sección se ilustran brevemente algunas características del software y se hace un rápido repaso de algunas de sus posibilidades de cómputo en relación con la enseñanza. La cuarta sección explica cómo y dónde descargarlo y usarlo, y proporciona algunos enlaces y referencias para aprender más y para instalar un servidor de Sage propio accesible a través de Internet. Concluimos con una muestra de las posibilidades que nos ofrece Sage, sacando todo el rendimiento al modelo de desarrollo del software libre.

Historia de Sage

El creador de Sage es William Stein (<http://wstein.org>), profesor de la Universidad de Washington. Stein tiene una gran experiencia en la utilización de sistemas de álgebra computacional (CAS, por sus siglas inglesas) para el estudio de problemas en teoría de números. Después de trabajar con diversos sistemas, utilizó y ayudó a desarrollar el sistema Magma (<http://magma.maths.usyd.edu.au/magma>), un CAS comercial muy especializado desarrollado en Australia. Su amplio conocimiento de Magma le permitió ver las dificultades que entraña el modelo de software comercial en general, y del software científico comercial en particular. A pesar de descubrir y documentar fallos en el sistema Magma, los propietarios del sistema no se mostraron muy partidarios de corregirlos. Es más, tampoco se mostraron especialmente comunicativos a la hora de explicar en detalle el funcionamiento de ciertos algoritmos fundamentales. Lo cual, tratándose de software para el tratamiento de las matemáticas, viene a ser como si un matemático nos dijera que un teorema es cierto, pero se negase a darnos la demostración alegando cuestiones de privacidad comercial.

Después de varios encontronazos con los desarrolladores de Magma, en el año 2004 Stein tiene la *loca* idea de crear un CAS gratuito de código abierto, un CAS que cualquier estudiante o profesor pudiese utilizar sin restricciones de ningún tipo (incluyendo las económicas) y que fuese científicamente riguroso, en el sentido de que todos los algoritmos y métodos utilizados pudieran ser conocidos y mejorados por cualquiera. En palabras de Stein, la misión de Sage era “*creating a viable free open source alternative to Magma, Maple, Mathematica and Matlab*” (crear una alternativa libre y de código abierto a Magma, Maple, Mathematica y Matlab). David contra Goliat.

La empresa parecía titánica, pero no se partía de cero. Había muchas cosas que hacer, pero algunas ya estaban hechas y se podían utilizar: Maxima, Singular, GNUPlot,... No se trataba de inventar la rueda sino de construir un coche. Pronto la idea empezó a entusiasmar a numerosos especialistas en el área y la loca idea empezó a tomar cuerpo. Curiosamente, una amenaza de los creadores de Magma (ver Stein 2009) impulsó definitivamente el proyecto de modo que en febrero de 2006 aparecía la versión 1.0 de la aplicación. La historia de Sage acaba de empezar...

Algunas otras consideraciones acerca de Sage y del software matemático libre en general pueden encontrarse en Abánades et al. (2009)

Cómo utilizar Sage

Utilizar Sage es bastante sencillo una vez que hemos tenido en cuenta algunos detalles. Para empezar, Sage se puede utilizar de varias formas distintas, siendo la instalación clásica en nuestro propio PC una de ellas. Pero también podemos utilizarlo sencillamente lanzando un LiveCD (disponible en <http://www.sagemath.org/download.html>) o, mejor aún, sin instalar ni descargar nada, solamente conectándonos a Internet.

La instalación en un PC es sencilla, pero depende fundamentalmente del sistema operativo que utilices. Si usas Mac o GNU/Linux la instalación no puede ser más simple: descárgate el fichero correspondiente (de <http://www.sagemath.org/download.html>), descomprímelo y ejecútalo. Todo funciona a la primera. Si utilizas un sistema Windows la instalación es algo más laboriosa (ya que Sage, de momento, no tiene una versión nativa para Windows, aunque Microsoft está subvencionándola). Te damos más detalles sobre la instalación bajo Windows un poco más adelante. En todo caso, para instalar Sage en tu PC lo mejor es visitar su página web y seguir los enlaces (un poquito de inglés será de gran ayuda).

Pero suponemos que de momento optarás por la solución más cómoda, que es seguir leyendo sin descargarte nada, y tal vez probar la opción más rápida: usar Sage a través de Internet. Aunque es posible usar cualquier navegador, por razones de seguridad y facilidad de uso te sugerimos el uso de Firefox (<http://www.mozilla.com>).

Para un primer contacto con Sage, desde tu navegador puedes visitar alguna de las siguientes direcciones:

<http://sagenb.org>

<http://alpha.sagenb.org>

<https://sagenb.kaist.ac.kr:8022>

<http://flask.sagenb.org>

Te recomendamos utilizar la primera, que es la canónica. La tercera, aunque lejana pues el servidor está físicamente en Corea del Sur, presenta la particularidad de que vive siempre el mismo día: a las 6:00 a.m. todo se pone a cero y ¡vuelta a empezar! Podremos, como Bill Murray en *Atrapado en el tiempo*, hacer lo que queramos sin que nuestros actos tengan consecuencia alguna. Si te decides por esta tercera (o cualquier otro servidor de Sage que use el protocolo seguro https) encontrarás un aviso de seguridad del navegador como el mostrado en la Figura 1.



Figura 1. Advertencia de seguridad cuando accedemos a un servidor seguro Sage.

En este caso, éste es un mensaje estándar y es seguro aceptar la excepción. Para ello haz clic en *Entiendo los riesgos*, después en *Añadir una excepción* y por último en *Confirmar excepción de seguridad*. Deberías entonces ver en tu pantalla la Figura 2. Estás en la página inicial del cuaderno de trabajo de Sage, el *notebook*.

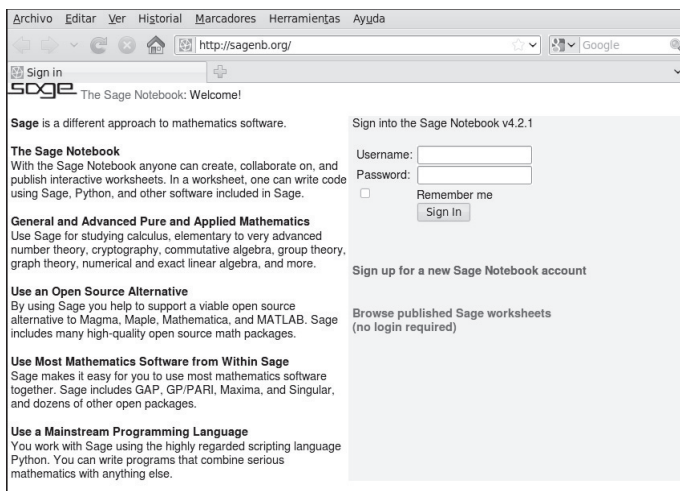


Figura 2. La pantalla inicial del notebook de Sage.

En la parte derecha de la pantalla puedes ver dos enlaces (en azul): el de abajo ofrece la posibilidad de curiosear por las hojas de trabajo, *worksheets*, de otros usuarios, sin necesidad de registrarse. Es interesante hacerlo, pero ten en cuenta que la mayoría de las hojas están en inglés y son documentos sin pulir; además, no podrás ejecutarlos (aunque sí copiarlos una vez tengamos nuestra propia cuenta). Con el enlace de arriba, en cambio, puedes hacerte con una cuenta en ese servidor (¡no, no es necesario enviar ningún SMS!). Hazlo, y empezaremos a usar el notebook. Puede que tengas algún problema con la velocidad de la red. Los servidores de sagenb.org están físicamente en el estado de Washington (EE.UU.) y, aunque están mejorando continuamente, todavía no tienen la potencia de los servidores de Google.

Una vez dentro del sistema encontrarás una pantalla como la que muestra la Figura 3. En ella, haz clic en *New Worksheet* y renombra la hoja si el sistema te lo pide.

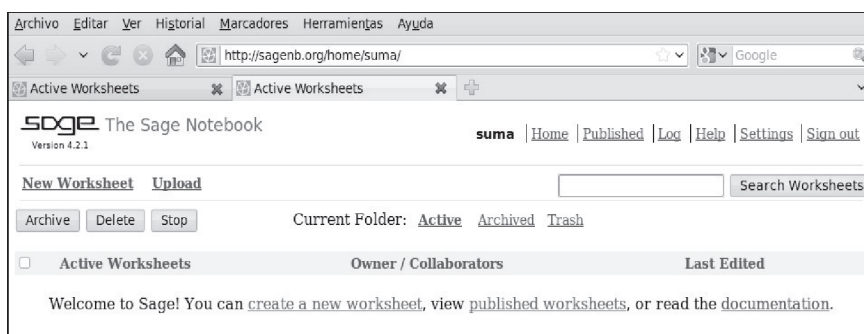


Figura 3. El notebook al entrar por primera vez como usuario/a con cuenta.

Ya puedes empezar a hacer cálculos: haz clic en la celdilla y escribe algo sencillo, por ejemplo, $2*3$. Si evalúas (clic en *evaluate* o *shift+Enter* o, en algún Mac, *shift+Return*) obtendrás lo esperado, tal como muestra la Figura 4.

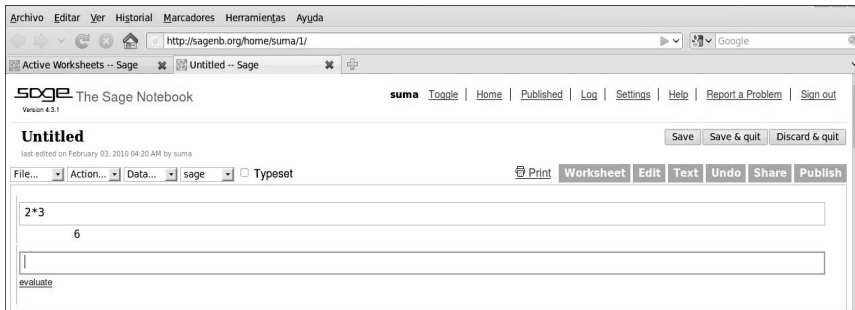


Figura 4. Celdillas de trabajo del notebook de Sage

Si has escogido instalar Sage o probar con el LiveCD, sigue las instrucciones de instalación y ejecuta la aplicación. Encontrarás una pantalla de texto que más o menos dice

```
-----
| Sage Version 4.2, Release Date: 2009-10-24          |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information. |
-----
```

sage:

Teclea `notebook()`, luego *Enter* y se lanzará el navegador con una página local como la mostrada en la Figura 3. A partir de ahí se procede igual que en el acceso web.

Trabajando en el notebook de Sage

En la sección anterior ya has hecho tu primer cálculo. Aquí insistimos con otros ejemplos para que te hagas una idea de cómo funciona el notebook. Mostramos lo que has de escribir alineado a la izquierda y la salida en el mismo tipo de letra indentada a la derecha. Por ejemplo el cálculo anterior será

```
2*3
    6
```

Hay dos comandos clásicos al demostrar las posibilidades de un sistema de cálculo: el primero se refiere a la impresión

```
print "hola,"; print "mundo!"
    hola,
    mundo!
```

y el segundo es el factorial. ¡Un momento! ¿Cómo se invoca: `!`, `fact`, ...? Si escribimos `fac` y apretamos *Tab* obtenemos todos los comandos que empiezan por esas letras

```
fac (+ Tab)
    factor factorial factorization
```

y clicando en la segunda queda escrita como entrada. Para decidir si es la adecuada podemos pedir ayuda añadiendo una interrogación después del comando

```
factorial?
```


con lo que aparece un cuadro de texto como el parcialmente mostrado en la Figura 5, que resuelve la duda.

```
File: /opt/sage/sage-4.2-linux-Ubuntu_9.04-i686-Linux/local/lib/python2.6/site-packages/sage/functions/other.py  
Type: <class 'sage.functions.other.Function_factorial'>  
Definition: factorial(n, **kwds)  
Docstring:  
Returns the factorial of  $n$ .
```

Figura 5. Fragmento de la ayuda relativa al comando factorial.

Si añadimos un segundo signo de interrogación obtendremos el código fuente usado en la evaluación del comando, dando así libertad al usuario para comprobar la corrección de los algoritmos usados.

Una de las características más llamativas de los sistemas de cálculo es su capacidad para obtener representaciones gráficas precisas. La sintaxis de Sage en este aspecto es parecida a la de Mathematica. Por ejemplo

```
plot(sin, (-pi, pi))  
y  
var('y'); plot(sin(y), (y, -pi, pi))
```

devuelven la gráfica esperada (Figura 6). Nótese que en la última línea hay que declarar explícitamente la variable usada.

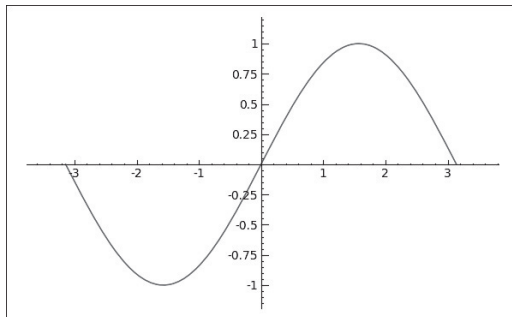


Figura 6. Gráfica del seno devuelta por Sage.

En cuanto a representación tridimensional, Sage integra un applet, *Jmol*, mediante el cual es posible interactuar desde el notebook con la superficie representada. Por ejemplo, la siguiente orden dibuja un cono de eje z (Figura 7)

```
var('x y z'); implicit_plot3d(x^2+y^2-z^2, (x, -2, 2), (y, -2, 2), (z, -2, 2))
```

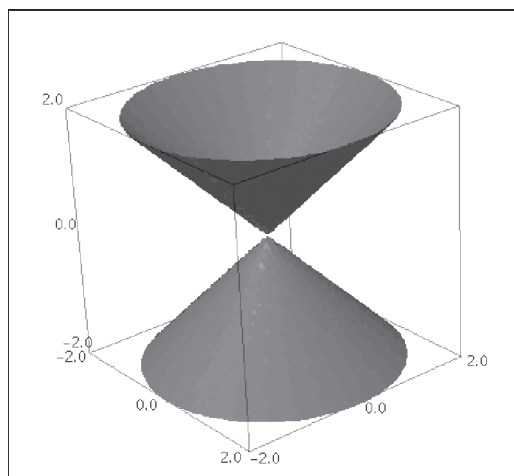


Figura 7. El cono $z^2=x^2+y^2$.

El cálculo de límites, derivadas, integrales,... es también el usual en estos sistemas

```

lim((1+1/x)^x, x=oo)
e
diff(sin(x)*log(x^(1/x)), x)
-(log(x)/x^2 - 1/x^2)*sin(x) + log(x^(1/x))*cos(x)
integrate(-(log(x)/x^2 - 1/x^2)*sin(x) + log(x^(1/x))*cos(x))
log(x)*sin(x)/x
maxima.taylor(cos(x), x, 0, 4)
1-x^2/2+x^4/24

```

Esta última computación (y algunas de las anteriores, si bien de manera no tan explícita) recurre a Maxima: las capacidades de cálculo simbólico en Sage son, en gran parte, deudoras de Maxima.

Esto es un ejemplo concreto de la filosofía de Sage ya mencionada: no reinventa la rueda, construye un coche. Si un software para un determinado campo es libre y es eficiente se incorpora al sistema. Por ejemplo, en <https://kimba.mat.ucm.es:9000/home/pub/5> puede verse una hoja de trabajo en Sage que permite calcular la envolvente de un tipo especial de escaleras (las que se deslizan por una pared experimentando, mientras lo hacen, una variación de su longitud). Puesto que los cálculos necesarios para la obtención de la envolvente involucran eliminación de variables en anillos de polinomios se usa un programa específico para ello, Singular (<http://www.singular.uni-kl.de>). Aunque teóricamente podría usarse Maxima para ello, nos ha resultado más cómodo utilizar aquel. Otra muestra más de libertad dentro de Sage.

Ha de notarse que esta hoja de trabajo ilustra además otra valiosa aportación del notebook de Sage: la posibilidad de incrustar applets en las hojas de trabajo, como muestra la Figura 8 respecto a GeoGebra (<http://www.geogebra.org>).

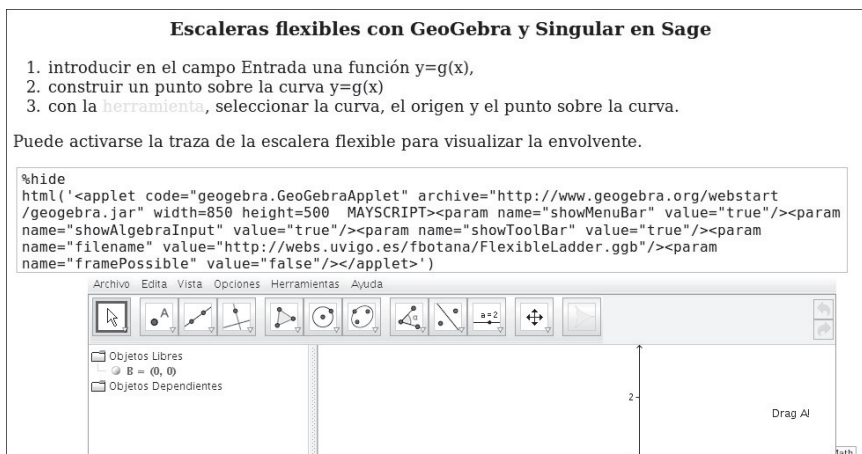


Figura 8. GeoGebra dentro del notebook de Sage

No es el objetivo de este artículo ser un manual de Sage, sino simplemente dar noticia de su existencia y utilidad. Quien lea esto sabrá sin duda por propia experiencia que cuando realmente se aprende es cuando se hace. Como verdaderos documentos de referencia se pueden citar varios, todos descargables del sitio sagemath.org. El manual de Sage (The Sage Development Team 2010), nos familiarizará con el sistema en pocas horas. Si buscamos escritos en castellano, sugerimos Tábara (2009) para ver las posibilidades matemáticas de Sage y una traducción castellana (Yanjara 2008) de un manual para principiantes (Kosan 2007).

La instalación en un sistema MS-Windows

Aunque la manera más cómoda de acercarse a Sage es a través de Internet, donde además se tiene acceso a las hojas de trabajo de otros usuarios y podemos compartir el trabajo con nuestros colaboradores, en muchas situaciones es conveniente tener instalado Sage en nuestro PC.

Como ya hemos indicado, la instalación de Sage en un Mac o PC bajo GNU/Linux consiste básicamente en descargar el fichero adecuado. La instalación de Sage en un entorno Windows no es mucho más dificultosa, pero, al no existir una distribución nativa para Windows, nos obliga a proceder con algo de cuidado.

En primer lugar, tenemos que bajar el fichero de instalación de Sage para Windows, que se encuentra en <http://www.sagemath.org/download-windows.html>. Podemos bajarlo de cualquiera de los servidores secundarios (*mirrors*) disponibles, por ejemplo, de RedIris:

<http://sunsite.rediris.es/mirror/sagemath/win/sage-virtualbox-4.3.zip>.

Es un fichero grande (1 GB), con lo que incluso con las mejores conexiones su descarga va a llevarnos cerca de una hora. A continuación, descomprimos este fichero .zip.

Antes de seguir con la instalación, tenemos que instalar una aplicación auxiliar. Se trata de un programa gratuito de código abierto, *VirtualBox*, en la versión de nuestro sistema operativo. Grosso modo, este programa nos va a permitir simular un entorno GNU/Linux en nuestro PC de modo que podamos usar Sage sin cambiar de sistema operativo. Lo encontraremos en <http://www.virtualbox.org>. Es ilustrativo el hecho de que para instalar VirtualBox tengamos que hacer frente a nada menos que seis *amenazas*, aceptando el riesgo que, según Windows, supone la instalación de una aplicación no reconocida por Microsoft, aunque tenga las garantías de *Sun Microsystems*, empresa pionera y líder en el sector de la computación. Este riesgo es, por otra parte, inexistente.

Una vez instalado VirtualBox, desde el menú *Archivo*, elegimos *Importar servicio virtualizado* y seleccionamos el fichero *sage.ovf* de la carpeta *sage-virtualbox-4.3* que está dentro de la carpeta que se generó al descomprimir el archivo *sage-virtualbox-4.3.zip*. Tanto el proceso de instalación de VirtualBox como la importación de Sage desde VirtualBox puede tardar varios minutos.

Una vez instalado Sage, desde la ventana de VirtualBox, iniciamos la máquina virtual Sage, abrimos nuestro navegador con la dirección que nos indica la máquina virtual...y ¡ya está funcionando nuestro notebook!

Nuestra versión de Sage, a pesar de esta instalación algo más laboriosa, es plenamente operativa. Todas las hojas de trabajo se guardan en la máquina virtual. Podemos descargarlas todas juntas a un fichero comprimido de nombre *download_worksheets.zip*. Para ello, basta hacer clic en el enlace *Download All Active* en la lista de las hojas activas. Este fichero contiene todas nuestras hojas de trabajo, y se guarda en el directorio de descargas por defecto de nuestro ordenador. Estas hojas se pueden utilizar en cualquier otro ordenador donde tengamos instalado Sage, o en un servidor Sage, subiendo el fichero con el comando *upload*.

Posibilidades de desarrollo

El modelo propio de desarrollo de software libre que se aplica en Sage, en el que grupos de matemáticos y programadores colaboran juntos para mejorar constantemente el sistema, permite que nuevas funcionalidades e ideas de utilización surjan cada día. A este respecto, la visita regular a los grupos de Google relativos a Sage es recomendable para quienes tengan interés en mantenerse informados (en inglés) de las novedades en este sistema. Para encontrarlos basta teclear *sage google* y alguna de las palabras *edu*, *notebook* o *support* en cualquier buscador.

Como hemos visto, Sage se puede utilizar vía web siendo posible compartir hojas de trabajo con otros usuarios. Esto abre ilimitadas posibilidades de aplicación en el ámbito docente: clases guiadas en laboratorio, tareas a realizar en casa, trabajos en grupo... Sin embargo, el uso habitual de servidores Sage ajenos puede suponer una limitación técnica. Por ello, de cara a un uso en un contexto amplio, como el de un instituto o una universidad, lo más conveniente es instalar un servidor Sage propio.

Montar un servidor Sage propio, si bien no es una tarea demasiado complicada, sí requiere algunos conocimientos de GNU/Linux y del funcionamiento de un servidor web. Las instrucciones que da Dan Drake en <http://wiki.sagemath.org/DanDrake/JustEnoughSageServer> garantizan razonables posibilidades de éxito: basta VirtualBox y una distribución de GNU/Linux sencilla (Jeos) para crear nuestro propio servidor web.

Probablemente haya en tu centro algún ordenador al que los virus de Windows y la obsolescencia planificada de nuestra sociedad de consumo hayan arrinconado: ¡Ese es el equipo perfecto para instalarle Ubuntu y crear la máquina virtual que permita ejecutar Sage remotamente!

Otra posibilidad de uso de Sage algo más complicada es ejecutar directamente cálculos en Sage a través del protocolo http sin utilizar necesariamente un navegador web. Esto nos permite, de modo transparente para el usuario, acceder a la potencia de Sage sin necesidad de entrar en una cuenta. Aunque esta característica exige ciertos conocimientos de programación, pensamos que abre vías para la elaboración y uso de nuevos materiales educativos que antes estaban condicionadas por el uso de aplicaciones comerciales caras. La información relativa a esta posibilidad puede encontrarse en <http://sagemath.org/doc/reference/sagenb/simple/twist.html>.

Referencias bibliográficas

- Abánades, M. A., Botana, F., Escribano J. y Tabera, L. F. (2009). Software matemático libre. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 12 (2) 325-346.
<http://itis.cesfelipesecondo.com/secciones/WebPersonal/archivos/1/OpenSourceMath-Gaceta-baja-res.pdf>
- Yanajara. H. (2008). *Manual de Sage para principiantes*.
http://sagemath.org/es/Manual_SAGE_principiantes.pdf
- Kosan T. (2007). *Sage for Newbies*.
http://sage.math.washington.edu/home/tkosan/newbies_book/
- Real, M. (2009). La potencia de las TIC para el cálculo simbólico. *Suma*, nº 61, 55-61.
- Real, M. (2009). El cálculo simbólico de forma gráfica. *Suma*, nº 62, 57-62.
- Rodríguez, M. (2009). Maxima, un sistema libre de cálculo simbólico y numérico. *Suma*, nº 60, 7-20.
- Stein, W. (2009). Mathematical Software and Me: a very personal recollection.
<http://modular.math.washington.edu/mathsoftbio/history.pdf>
- Tábara, J. L. (2009). *Matemáticas elementales con Sage*.
http://sagemath.org/es/Introduccion_a_SAGE.pdf
- The Sage Development Team (2010). *Sage Tutorial. Release 4.3.1*.
<http://sagemath.org/doc-pdf/en/SageTutorial.pdf>

